

Cinématique et dynamique du point matériel

2.1 Cinématique du point matériel

La mécanique se divise en deux parties : la cinématique et la dynamique. La **cinématique** étudie le mouvement des corps sans se préoccuper de la nature des causes qui provoquent ce mouvement. La **dynamique**, par contre, cherche à identifier les causes de ce mouvement. Afin d'étudier le mouvement d'un point matériel, il faut un objet de référence physique appelé le référentiel. Pour décrire mathématiquement le mouvement du point matériel, il faut l'exprimer par rapport à un repère géométrique. La cinématique consiste à décrire, la position, la vitesse et l'accélération d'un corps. Ces grandeurs sont des vecteurs.

2.1.1 Point matériel

Pour commencer ce cours de mécanique, on va adopter un modèle très simple. On va supposer que l'objet physique que l'on veut décrire peut être représenté simplement par un point auquel on attribue toute la masse, c'est-à-dire la quantité de matière de l'objet. Ce point est un point physique que l'on appelle **point matériel**. Ce modèle du point matériel est une idéalisation de la réalité physique. Ce modèle n'est jamais parfaitement exact, parce que la réalité physique est toujours trop complexe. Cependant, dans certains cas, on peut considérer par exemple qu'une boule de billard, un pendule, un homme ou même un avion sont des points matériels. Ces objets sont bien sûrs différents, mais suivant la nature de leur mouvement, ils peuvent tous être considérés comme des points matériels. Le modèle du point matériel est donc un modèle très simple, mais qui est une bonne approximation quantitative et qualitative dans bon nombre de cas. En général, on prend comme point matériel le centre de masse – aussi appelé centre de gravité – d'un objet.

Le modèle du point matériel est limité. Il ne permet pas de rendre compte de la rotation propre d'un solide. La différence entre le modèle du point matériel et celui du solide indéformable est bien illustré par l'exemple de la boule de billard. En frappant une boule de billard de différentes manières avec une queue de billard, on peut lui donner différents effets. On peut permettre à la boule blanche de s'arrêter lors d'un choc, d'accompagner l'autre boule ou de revenir en arrière. On peut aussi lui donner une trajectoire courbe. Ceci est impossible avec un point matériel.

Si un pendule consiste en une masse suspendue au bout d'un fil sans masse, le modèle du point matériel sera un bon modèle. On appelle un tel pendule, un **pendule simple** ou un **pendule mathématique**. En revanche, si le balancier consiste en une barre métallique dont l'épaisseur n'est pas négligeable par rapport à la longueur, alors il faudra le modéliser comme un solide. Si un homme plonge à la verticale d'un plongeon des 10 mètres, la description de sa chute peut bien se faire avec le modèle du point matériel. En revanche, si maintenant il effectue une triple saut périlleux, il faudra nécessairement considérer le modèle du solide pour faire une bonne description de sa dynamique. Si vous êtes un ou une athlète vous pouvez essayer d'expérimenter la différence entre ces deux modèles en vous rendant à la piscine. Si on veut décrire le mouvement d'un avion qui vole en ligne droite, on peut le modéliser comme un point matériel. Mais lorsqu'il effectue un virage, il tourne autour de son centre de gravité et là on doit le considérer aussi comme un solide. Pour traiter tous les



Boules de billard

problèmes de mécanique qui décrivent un mouvement de rotation propre, on devra utiliser la dynamique du solide.

Lorsqu'on considère un solide comme un point matériel, on commet deux types d'erreurs : des **erreurs quantitatives** d'une part et des **erreurs qualitatives** d'autre part. Si on traite une barre métallique comme un point matériel, on fera une erreur quantitative sur la valeur de sa période d'oscillation. Si on traite une boule de billard comme un point matériel on fera une erreur qualitative en ne tenant pas compte de son mouvement de rotation.

2.1.2 Référentiel

Pour décrire le mouvement d'un objet, on doit le faire par rapport à un objet indéformable de référence. Cet objet, qui peut être immense, est appelé le **référentiel**. Formellement, un référentiel est un ensemble de N points matériels, où $N \geq 4$, non-coplanaires et à distance constante les uns par rapport aux autres.

Pour décrire les expériences de physique montrées dans ce cours, on choisit comme référentiel l'auditoire, c'est-à-dire la terre. Si par exemple, on désire mesurer la vitesse de déplacement relatif des vagues par rapport à un voilier, on choisira comme référentiel le voilier. Pour décrire le mouvement de la terre autour du soleil, on choisira comme référentiel le système solaire, constitué du centre du soleil et de trois étoiles fixes.

Un objet physique doit être indéformable pour servir de référentiel. Un solide indéformable est constitué de points matériels non-coplanaires et à distance constante les uns par rapport aux autres. Pour servir de référentiel un objet doit être au moins constitué de quatre points matériels non-coplanaires. Il peut évidemment en avoir un très grand nombre mais il en faut au minimum quatre. Pourquoi est-ce que les points doivent être à distance constante les uns par rapport aux autres ? Parce que si ce n'était pas le cas, on n'aurait pas d'étalon pour définir et mesurer des distances. Pourquoi est-ce qu'un référentiel doit être défini par au minimum quatre points non-coplanaires ? Parce qu'il faut pouvoir définir et mesurer des distances dans trois directions spatiales orthogonales.

Le choix du référentiel est très important. Si on choisit un référentiel accéléré, on devra tenir compte des forces d'inertie dans la description du mouvement. Par exemple, lorsqu'un bateau hors-bord fait un virage rapide, une force centrifuge agit sur les occupants dans le référentiel du bateau. On peut citer comme autre exemple la force de Coriolis qui agit sur le mouvement des nuages dans le référentiel accéléré de la terre qui tourne sur elle-même.

Le choix du référentiel a joué un rôle crucial dans l'histoire de la mécanique et de la physique. La relativité est une question de référentiel ! La relativité restreinte requiert que les lois de la physique soient les mêmes par rapport à tous les référentiels d'inertie. La relativité générale généralise la relativité restreinte à tous les référentiels, même les référentiels accélérés.



Voilier

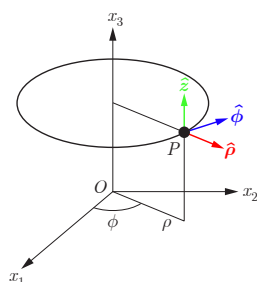
2.1.3 Repère

Pour décrire mathématiquement le mouvement d'un point matériel par rapport à un référentiel, il faut se référer à un **repère**. Un repère est un concept géométrique. C'est une base de trois vecteurs non-coplanaires de norme constante qui sont attachés à un point de l'espace. Puisque ces vecteurs sont non-coplanaires, ils forment une base de l'espace à trois dimensions. En algèbre linéaire, on dit qu'ils engendrent l'espace à trois dimensions. Puisqu'ils sont de norme constante, ils servent d'étalon géométrique pour quantifier le mouvement.

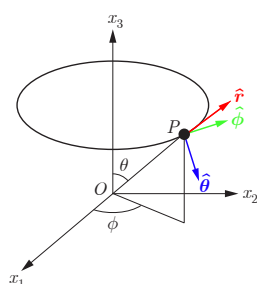
Un repère orthonormé est un repère dont les vecteurs de base sont orthogonaux et de norme unité. En mécanique du point matériel et du solide indéformable, on considère uniquement des repères orthonormés. Toutefois, lorsqu'on veut décrire des solides déformables ou faire de la relativité générale, on doit aussi considérer des repères non-orthonormés. Mais, rassurez-vous, dans ce cours on va se faciliter la vie et considérer uniquement des repères orthonormés.

L'exemple le plus célèbre de repère direct est le **repère cartésien**. Mais, il existe aussi d'autre repères comme le **repère cylindrique** ou le **repère sphérique** que nous allons définir ultérieurement et utiliser abondamment dans ce cours.

J'attire votre attention sur le fait qu'il ne faut confondre la notion géométrique de repère



Repère cylindrique



Repère sphérique

avec la notion physique de référentiel. Le référentiel désigne un objet physique décrit en termes de point matériels. Le repère est une entité géométrique décrite en termes de points d'espace et de vecteurs. Le repère sert d'étalon géométrique pour mesurer des distances par rapport au référentiel et ainsi quantifier le mouvement.

2.1.4 Vecteur position

Le **vecteur position** $\mathbf{OP}$ indique la position du point matériel P par rapport à l'origine O d'un repère cartésien (Fig. 2.1).

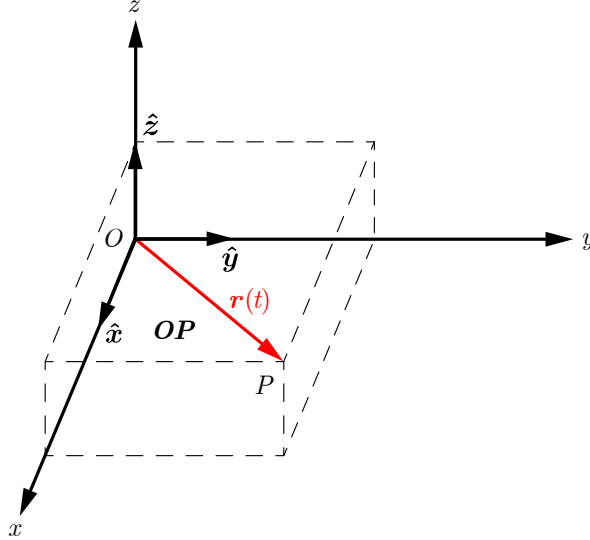


FIGURE 2.1 Vecteur position $\mathbf{OP} \equiv \mathbf{r}(t)$ du point matériel P .

On notera le vecteur position $\mathbf{OP}$ du point matériel P de manière plus concise comme $\mathbf{r}(t)$ car la position d'un point matériel est une fonction du temps t . En effet, lorsque le point matériel se déplace sa position change au cours du temps. Dans le repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ qui définit un système d'axes (x, y, z) dont l'intersection se trouve à l'origine O , les coordonnées du vecteur position sont $(x(t), y(t), z(t))$.

En physique en général et en mécanique en particulier, lorsqu'on introduit une grandeur, il faut toujours spécifier son unité. C'est la différence principale entre la physique et les mathématiques. En physique, on s'intéresse à la réalité matérielle et tangible. L'**unité physique** de la position dans le système international d'unités (SI) est le **mètre** noté [m]. L'unité physique du temps est la **seconde** notée [s].

2.1.5 Trajectoire

Après avoir défini le vecteur position d'un point matériel, on est en mesure de définir la notion de trajectoire. La **trajectoire** Γ d'un point matériel est l'ensemble des points de l'espace qui sont occupés par le point matériel au cours du temps. Ainsi, la trajectoire Γ est une courbe ou une droite telle qu'en tout temps t , le vecteur $\mathbf{OP}$ du point matériel P coïncide avec son vecteur position $\mathbf{r}(t)$,

$$\Gamma = \{ P \mid \mathbf{OP} = \mathbf{r}(t) \quad \forall t \} \quad (2.1)$$

En mathématiques on parle de **lieu géométrique**. Par exemple, la trajectoire d'un avion de ligne est facilement observable par beau temps. Elle correspond à la trace laissée par la combustion de kérosène dans le ciel. On peut mentionner plusieurs exemples de trajectoires particulières de points matériels. La trajectoire d'un mouvement rectiligne est, comme son nom l'indique, une ligne droite. La trajectoire d'un mouvement circulaire est, comme son nom l'indique, un cercle. La trajectoire balistique d'un projectile – par exemple un boulet de canon – en absence de frottement est une parabole. La trajectoire de la terre autour



Trajectoire

du soleil est une ellipse, c'est ce qu'affirme la loi des orbites de Kepler. La trajectoire d'une comète traversant le système solaire est une hyperbole.

2.1.6 Vecteur vitesse

La vitesse $\mathbf{v}(t)$ est un vecteur. C'est une grandeur avec une norme et une orientation bien précises tout comme le vecteur position $\mathbf{r}(t)$. La vitesse correspond intuitivement au déplacement au cours du temps. Le vecteur vitesse d'un point matériel s'exprime donc comme le rapport du vecteur déplacement $\Delta\mathbf{r}(t)$ et de l'intervalle de temps Δt . Etant donné qu'on cherche la vitesse instantanée au temps t , il faut prendre la limite lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers 0. Le vecteur déplacement $\Delta\mathbf{r}(t)$ s'exprime comme la différence vectorielle entre les vecteurs positions $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ et $\mathbf{r}(t)$ (Fig. 2.2).

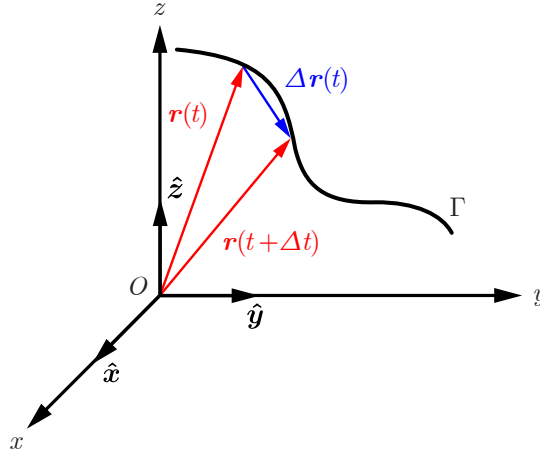


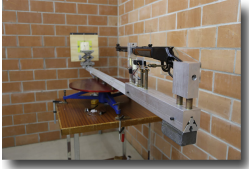
FIGURE 2.2 Vecteur déplacement $\Delta\mathbf{r}(t)$ qui est colinéaire vecteur vitesse $\mathbf{v}(t)$ d'un point matériel.

L'expression mathématique du vecteur vitesse est donc définie comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

En utilisant la convention des physiciens, on dénote cette dérivée comme le rapport du vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$ et de l'intervalle de temps infinitésimal dt . Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point matériel représentée en gras (Fig. 2.2). L'unité physique de la vitesse dans le système d'unités international est notée $[\text{m s}^{-1}]$.

A titre d'exemple, on peut citer la mesure de la vitesse d'une balle de fusil à l'aide de cellules photoélectriques distantes d'un mètre. L'inverse du temps de passage de la balle entre les deux cellules distance correspond la vitesse exprimée en $[\text{m/s}]$.



Mesure de la vitesse

2.1.7 Vecteur accélération

L'accélération $\mathbf{a}(t)$ est un vecteur. C'est une grandeur avec une norme et une orientation bien précises tout comme le vecteur position $\mathbf{r}(t)$ et le vecteur vitesse $\mathbf{v}(t)$. L'accélération correspond intuitivement à la variation de vitesse au cours du temps. L'accélération s'exprime donc comme le rapport du vecteur variation de vitesse $\Delta\mathbf{v}(t)$ et de l'intervalle de temps Δt . Etant donné qu'on cherche l'accélération instantanée au temps t , il faut prendre la limite lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers 0. Le vecteur variation de vitesse $\Delta\mathbf{v}(t)$ s'exprime comme la différence vectorielle entre les vecteurs vitesses $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ et $\mathbf{v}(t)$ (Fig. 2.3).

L'expression mathématique du vecteur accélération est donc définie comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps,

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \quad (2.3)$$

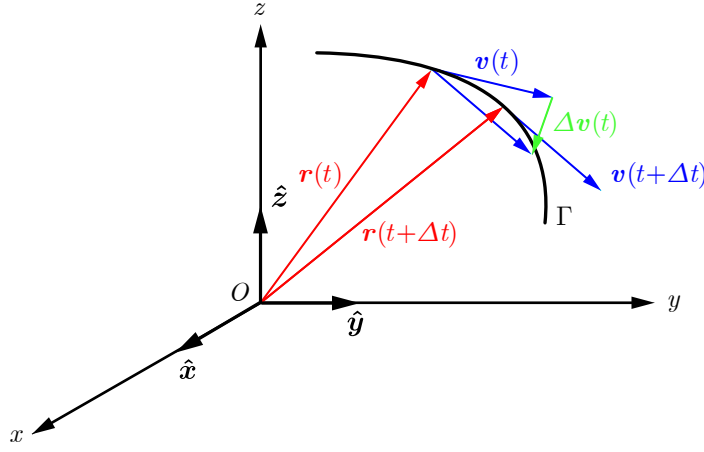


FIGURE 2.3 Vecteur variation de vitesse $\Delta \mathbf{v}(t)$ qui est colinéaire au vecteur accélération $\mathbf{a}(t)$ d'un point matériel.

En utilisant la convention des physiciens, on dénote cette dérivée comme le rapport du vecteur variation de vitesse infinitésimale $d\mathbf{v}$ et de l'intervalle de temps infinitésimal dt . L'unité physique de l'accélération dans le système d'unités international est notée $[\text{m s}^{-2}]$.

2.2 Mouvement rectiligne

Dans cette section, on va considérer deux mouvements rectilignes différents. Le mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel, pour lequel la vitesse est constante, et le mouvement rectiligne uniformément accéléré, pour lequel l'accélération est constante. Il existe bien sûr beaucoup de mouvements rectilignes pour lesquels l'accélération n'est pas constante. Ici, on va se limiter aux cas d'une accélération nulle ou constante.

2.2.1 Mouvement rectiligne uniforme

Un point matériel qui se déplace en ligne droite à vitesse constante suit un **mouvement rectiligne uniforme**. Sa trajectoire est donc une droite. Pour caractériser ce mouvement, on choisit un axe x le long de la droite. La position est donc repérée par la coordonnée $x(t)$. On cherche à déterminer l'**équation horaire** qui donne la position au cours du temps. Par définition d'un mouvement rectiligne uniforme, la coordonnée v de la vitesse le long de l'axe x est constante (Fig. 2.4). Ainsi, l'**équation de la vitesse** s'écrit

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad dx(t) = v dt \quad (2.4)$$



FIGURE 2.4 Mouvement rectiligne uniforme à vitesse v constante d'un point matériel P .

La variation de la coordonnée de position Δx , ou le déplacement, durant l'intervalle de temps de $t' = 0$ à $t' = t$ est la somme continue, ou l'intégrale, du déplacement infinitésimal $dx'(t')$ donné par l'équation (2.4) où $v = \text{cste}$,

$$\Delta x = x(t) - x(0) = \int_{x(0)}^{x(t)} dx'(t') = \int_0^t v dt' = v \int_0^t dt' = vt \quad (2.5)$$

Il faut tenir explicitement compte de la condition initiale sur la coordonnée de position,

$$x(0) = x_0 \quad (2.6)$$



Glisseur sur rail à air

En substituant cette condition initiale (2.6) dans le déplacement (2.5), on obtient l'**équation horaire**,

$$x(t) = v t + x_0 \quad (2.7)$$

L'équation de la vitesse (2.4) est une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps. Il faut donc une seule condition initiale sur la position (2.6) pour déterminer l'équation horaire (2.7).

A titre d'exemple, on peut citer le mouvement d'un glisseur libre sur un rail à air horizontal, le mouvement d'une pierre de curling sur une patinoire bien lisse ou le mouvement d'une balle de fusil lorsqu'on néglige l'action de la force de pesanteur.

2.2.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Un point matériel qui se déplace en ligne droite à accélération constante suit un **mouvement rectiligne uniformément accéléré**. Sa trajectoire est donc une droite. Pour caractériser ce mouvement, on choisit un axe x le long de la droite. La position est donc repérée par la coordonnée $x(t)$. On cherche à déterminer l'**équation horaire** qui donne la position au cours du temps. Par définition d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, la coordonnée a de l'accélération le long de l'axe x est constante (Fig. 2.5). Ainsi, l'**équation du mouvement** s'écrit

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad dv(t) = a dt \quad (2.8)$$



FIGURE 2.5 Mouvement rectiligne uniformément accéléré à accélération a constante d'un point matériel P .

La variation de la coordonnée de vitesse Δv durant l'intervalle de temps de $t' = 0$ à $t' = t$ est l'intégrale de la variation infinitésimale de vitesse $dv'(t')$ donné par l'équation (2.11) où $a = \text{cste}$,

$$\Delta v = v(t) - v(0) = \int_{v(0)}^{v(t)} dv'(t') = \int_0^t a dt' = a \int_0^t dt' = a t \quad (2.9)$$

Il faut tenir explicitement compte de la condition initiale sur la coordonnée de position,

$$v(0) = v_0 \quad (2.10)$$

En substituant cette condition initiale (2.10) dans la variation de vitesse (2.9), on obtient l'**équation de la vitesse**,

$$v(t) = a t + v_0 \quad (2.11)$$

La vitesse s'écrit aussi comme la dérivée de la position,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad (2.12)$$

L'identification des membres de droites des équations (2.11) et (2.12) s'écrit,

$$\frac{dx}{dt} = a t + v_0 \quad \text{ainsi} \quad dx(t) = a t dt + v_0 dt \quad (2.13)$$

Le déplacement Δx durant l'intervalle de temps de $t' = 0$ à $t' = t$ est l'intégrale du déplacement infinitésimal $dx'(t')$ donné par l'équation (2.13) où $a = \text{cste}$ et $v_0 = \text{cste}$,

$$\Delta x = x(t) - x(0) = \int_{x(0)}^{x(t)} dx'(t') = a \int_0^t t' dt' + v_0 \int_0^t dt' = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \quad (2.14)$$

Il faut aussi tenir explicitement compte de la condition initiale sur la coordonnée de position,

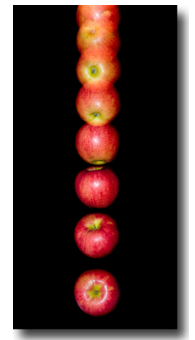
$$x(0) = x_0 \quad (2.15)$$

En substituant cette condition initiale (2.15) dans le déplacement (2.14), on obtient l'*équation horaire*,

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \quad (2.16)$$

L'équation du mouvement (2.8) est une équation différentielle du second ordre par rapport au temps. Il faut donc deux conditions initiales, une sur la vitesse (2.10) et l'autre sur la position (2.15) pour déterminer l'équation horaire (2.16).

A titre d'exemple, on peut citer le mouvement d'un glisseur entraîné par une masse sur un rail à air horizontal et le mouvement de chute libre d'une pomme soumis à l'accélération constante du champ de pesanteur.



Pomme en chute libre

2.3 Lois de Newton

Jusqu'à présent, on a défini les grandeurs cinématiques. On va maintenant définir des grandeurs dynamiques afin d'être en mesure d'énoncer les lois de la dynamique généralement appelées lois de Newton. Il y a trois lois de Newton. On abordera les deux premières lois dans cette section. La troisième loi sera traitée ultérieurement. Le but de cette section est de pouvoir déterminer le mouvement d'objets soumis à des forces extérieures.

2.3.1 Grandeurs extensives et intensives

Avant d'introduire les grandeurs caractéristiques de la dynamique, nous devons au préalable définir les propriétés d'extensivité et d'intensivité.

Une grandeur physique est *extensive* si, pour un ensemble d'objets, la grandeur de l'ensemble est égale à la somme de la grandeur pour chaque objet. Cette définition peut sembler quelque peu abstraite. On va donc considérer quelques exemples. La quantité de matière est une grandeur extensive. La quantité de matière de deux objets identiques est égale à deux fois la quantité de matière d'un objet. La quantité de mouvement et la force sont aussi des grandeurs extensives. La force résultante qui s'applique sur un système est égale à la somme des forces. Le volume est bien sûr un autre exemple de grandeur extensive. Le volume de deux objets est égal à la somme des volumes des objets.

Une grandeur physique est *intensive* si, pour un ensemble d'objets, la grandeur est indépendante du nombre d'objets. La vitesse est un bon exemple de grandeur intensive. Prenons une voiture qui se déplace à une vitesse v . La voiture a quatre roues qui se déplacent à vitesse v . La vitesse de la voiture n'est pas la somme des vitesses de chaque roue, parce que la vitesse est une grandeur intensive. On verra que la vitesse est le quotient de deux grandeurs extensives. En utilisant le même raisonnement, on montre que l'accélération est aussi une grandeur intensive. Finalement, si on prend deux blocs de même température et qu'on les met en contact, la température du système sera la température de chaque bloc et non la somme des températures. La température est donc aussi une grandeur intensive.

2.3.2 Masse

La *masse* m d'un objet considéré comme un point matériel représente une quantité de matière. C'est donc une grandeur extensive définie positive. Si vous prenez deux objets, la masse totale est la somme des masses des deux objets. La masse est donc une grandeur additive. Comme la masse est une quantité de matière, elle n'a pas d'orientation. C'est donc une grandeur scalaire. La masse est une grandeur conservée. En mécanique newtonienne, on ne peut ni créer ni détruire de la matière. Cela n'est plus le cas en relativité, puisque la masse peut se transformer en un autre type d'énergie E comme le montre la célèbre formule

établie par Albert Einstein : $E = mc^2$ où c représente la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

En mécanique newtonienne, la masse est globalement conservée, mais elle peut sortir ou entrer dans un système. Si la masse d'un système change, c'est que de la masse est sortie ou entrée dans le système. S'il n'y a pas d'échange de masse avec l'extérieur, on dit que le système est **fermé**. Quand il y a échange de masse, on dit qu'il est **ouvert**. Un lingot d'or de masse donnée est un système fermé, sa masse est une constante. Une fusée entrain de décoller est un système ouvert, sa masse diminue au cours du temps parce que la fusée rejette des gaz dans l'atmosphère par combustion.

L'unité de la masse dans le système international d'unités est le kilogramme noté [kg]. La masse *étalon* définissant le kilogramme est un barreau de platine iridié qui se trouve au Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres, dans la banlieue de Paris.

Deux masses sont identiques si elles provoquent la même elongation lorsqu'on les suspend à des ressorts identiques.

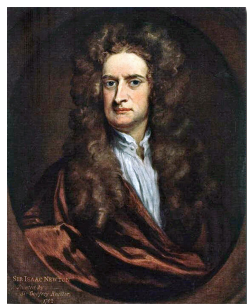


Etalon de platine

2.3.3 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement p est une grandeur physique qui a été introduite par Isaac Newton. L'idée géniale de Newton a été d'introduire cette grandeur physique pour décrire le mouvement. La quantité de mouvement est une grandeur extensive, car elle permet de décrire spécifiquement le mouvement d'une quantité de matière. La quantité de mouvement de deux objets est la somme de la quantité de mouvement de chaque objet, contrairement à la vitesse. Cette grandeur doit être vectorielle parce que le mouvement a une orientation bien précise.

Pour l'instant, on ne peut pas encore définir l'unité physique de la quantité de mouvement. La motivation de notre démarche deviendra plus clair lorsque nous aurons énoncé la 1^{ère} et la 2^e loi de Newton. Le concept de quantité de mouvement est un concept absolument central de la physique et pas seulement de la mécanique. Ce concept s'applique en relativité restreinte et générale et aussi en mécanique quantique. C'est donc un concept universel qu'a défini Isaac Newton !



Isaac Newton

2.3.4 1^{ère} loi de Newton

Je dois vous mettre en garde contre une erreur historique. La 1^{ère} loi de Newton n'a en réalité pas été découverte par Newton mais par Galilée. Il s'agit en fait du principe d'inertie de Galilée. J'ai beaucoup d'admiration pour Newton, mais je pense qu'il faut quand même rendre à Galilée ce qui lui revient.

Le **principe d'inertie** de Galilée est énoncé dans à lettre à Wesler de la manière suivante :

Etant écartés tous les obstacles extérieurs, un corps pesant sera indifféremment au repos ou en mouvement et il se conservera dans l'état où il sera placé : au repos, il restera au repos, en mouvement, il restera en mouvement.

Newton réalise que les obstacles extérieurs dont parle Galilée sont les forces utilisées par Stevin pour établir sa loi de la statique. Newton confère ainsi aux forces un rôle dynamique et reformule le principe d'inertie de Galilée qui devient sa 1^{ère} loi. Dans les *Principia Mathematica*, son oeuvre maîtresse traduite en français par la Marquise du Châtelet, il énonce la 1^{ère} **loi de Newton** de la manière suivante :

Tout corps persévère dans l'état de mouvement uniforme en ligne droite à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.

En termes plus modernes, on dirait simplement :

*Un corps a un mouvement rectiligne uniforme en absence de force extérieure résultante.
Si sa vitesse est nulle, alors il est au repos.*

Galilée a trouvé ce principe en se basant sur ses propres observations. Ce principe n'était pas du tout une évidence à l'époque de Galilée. Il faut se replacer dans le contexte historique de l'époque. Selon Aristote, le mouvement d'un objet dans l'air est son mouvement naturel. Il est porté par l'air. Les observations de Galilée sont diamétralement opposées. Le mouvement d'un objet dans l'air n'est pas son mouvement naturel. Il est freiné par l'air. Son mouvement naturel en absence d'interaction extérieure résultante est un mouvement rectiligne uniforme. Ce principe d'inertie est vraiment un tour de force conceptuel. Le concept de force a été proprement introduit en dynamique par Newton. Galilée ne parle que de l'effet du monde extérieur. Donc, si on mentionne le principe d'inertie en se référant à la 1^{ère} loi de Newton, c'est parce qu'il a complété l'énoncé du principe d'inertie en attribuant la cause de l'accélération d'un mouvement à une force.

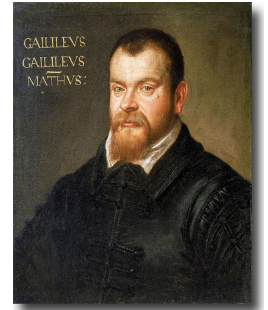
Pourquoi parle-t-on de principe d'inertie ? Qu'est-ce que l'inertie ? L'inertie d'un objet est la résistance que cet objet présente lorsqu'on le met en mouvement. L'inertie c'est ce qui s'oppose à une accélération. Le principe d'inertie définit sous quelle condition un objet suit un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire un mouvement en absence d'accélération. Il ne faut pas confondre le concept très général d'inertie avec les notions spécifiques de moment d'inertie ou de tenseur d'inertie d'un solide. Ces deux notions sont un cas particulier d'inertie pour un solide en rotation. On verra cela plus en détails lorsqu'on abordera la dynamique du solide.

Dans la section précédente, on a défini les vecteurs position, vitesse et accélération. La question qui se pose ici est de savoir par rapport à quel référentiel on peut définir ces notions. Peut-on choisir n'importe quel référentiel ? La réponse est non. Ces grandeurs cinématiques dépendent du référentiel choisi. Le principe d'inertie permet de choisir les référentiels par rapport auxquels on peut définir les lois de la dynamique. Ces référentiels sont les référentiels d'inertie. Par définition, un **référentiel d'inertie** est un référentiel par rapport auquel le principe d'inertie est vérifié. Par conséquent, dans un référentiel d'inertie, un objet qui n'est pas soumis à une force est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

On voit tout de suite que par définition un référentiel d'inertie n'est pas unique. Si on prend deux référentiels qui se déplacent à vitesse constante l'un par rapport à l'autre, un objet qui a un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel aura également un mouvement rectiligne uniforme dans l'autre. S'il est au repos dans un référentiel, il aura un mouvement rectiligne uniforme dans l'autre. Ces deux référentiels sont deux référentiels d'inertie. Il existe donc une infinité de référentiels d'inertie.

Le concept de référentiel d'inertie n'est pas un concept absolu. Il dépend du système physique qu'on cherche à décrire. Si on veut décrire la dynamique d'un petit pendule, d'environ 10 cm de long, dans un laboratoire sur une petite échelle de temps, d'une durée d'une minute environ, on peut considérer que la terre est un bon référentiel d'inertie. Par contre si on considère un grand pendule, d'environ 67 m comme celui de Foucault attaché au sommet du dôme du Panthéon à Paris, et qu'on veut décrire sa dynamique, on va devoir tenir compte du mouvement de rotation de la terre sur elle-même. Le plan d'oscillation du pendule va tourner au cours du temps. Pour décrire la dynamique d'un tel pendule, on va devoir prendre comme référentiel d'inertie le système solaire. Si un train se déplace à vitesse constante, et qu'on désire modéliser le mouvement d'un pendule attaché au plafond, on peut choisir comme référentiel d'inertie le train ou la terre. En général, il sera plus facile de choisir comme référentiel le train. Dans le cas où le train accélère, la dynamique du pendule change et le train n'est plus un référentiel d'inertie.

Il est important de faire la distinction entre les termes **principe** et **loi**. Un principe est plus fondamental et général qu'une loi. On utilise un principe pour formuler des lois. Le principe d'inertie porte bien son nom puisqu'il pose les bases de la dynamique à partir desquelles on va pouvoir formuler les lois de la dynamique.



Galileo Galilei



Pendule de Foucault

2.3.5 Force

Le concept de force est très ancien. Archimède a introduit ce concept pour expliquer la flottabilité d'un objet. Simon Stevin a utilisé la notion statique de force pour décrire des états d'équilibre au XVI^e siècle. Cependant, c'est Newton qui donne à la notion de force un statut dynamique. La force $\mathbf{F}$ est une grandeur physique qui modifie l'état de repos ou de mouvement uniforme d'un objet. C'est une grandeur extensive qui permet de décrire la cause de la variation de l'état de mouvement uniforme d'un objet. C'est une grandeur qui doit par construction être additive pour décrire la cause du mouvement d'une quantité de matière. Si deux forces s'exercent sur un objet, la force résultante est la somme des forces appliquées. Une force doit être une grandeur vectorielle parce qu'elle s'exerce sur l'objet dans une direction bien précise.

Si une force est appliquée sur un point matériel on peut la mesurer avec un dynamomètre relié par un fil au point matériel. Le point matériel est maintenu immobile par la force élastique exercée par le dynamomètre. La direction du fil donne la direction de la force et la valeur lue sur le dynamomètre, son intensité.

Pour l'instant, on ne peut pas encore définir l'unité physique de force. Pour pouvoir la déterminer, on doit définir la 2^e loi de Newton. Mais au préalable, on va examiner la règle de composition vectorielle des forces découverte expérimentalement par Stevin et établie théoriquement par Newton. Dans l'expérience de Stevin (Fig. 2.6), le point matériel P est immobile. Cela signifie que la somme vectorielle des forces $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$, dont les normes sont indiquées sur les dynamomètres en A et B , est égale à la force $\mathbf{F}_C$, dont la norme est indiquée sur le dynamomètre en C . Lorsque deux forces $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$ sont appliquées sur un

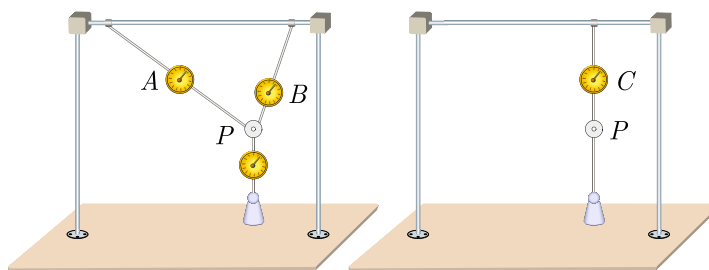


FIGURE 2.6 L'expérience de Stevin constitue une mesure de la composition de deux forces : la somme des forces exercées sur le point matériel P doit être nulle. La force mesurée par le dynamomètre en C doit être égale à la somme vectorielle des forces mesurées par les dynamomètres en A et B .

point matériel P , la somme vectorielle de ces forces est la force résultante $\mathbf{F}_C$ orientée selon la diagonale du parallélogramme engendré par $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$. La norme de la force résultante $\mathbf{F}_C$ correspond à la longueur de la diagonale du parallélogramme (Fig. 2.7). Quand les

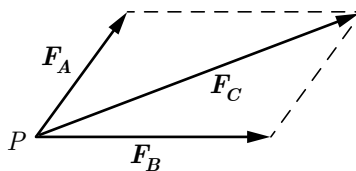


FIGURE 2.7 La force $\mathbf{F}_C$ est la somme vectorielle des forces $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$ appliquées sur le point matériel P .

forces sont décrites par des vecteurs, cette règle de composition vectorielle paraît naturelle et presque triviale, mais elle ne l'était pas du temps de Newton.

2.3.6 2^e loi de Newton

Après avoir défini les notions de référentiel d'inertie, de quantité de mouvement et de force, on peut à présent énoncer la 2^e loi de Newton et la transcrire sous forme mathématique. La 1^{ère} loi de Newton affirme que c'est sous l'action d'une force qu'un corps modifie son état



Simon Stevin

de mouvement. La grandeur physique qui caractérise l'état de mouvement est la quantité de mouvement. La force va donc modifier la quantité de mouvement. La **2^e loi de Newton** est énoncée par Newton dans ses *Principia Mathematica* de la manière suivante :

Les changements de mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font selon la ligne droite dans laquelle cette force est imprimée à l'objet.

En termes plus modernes, on dirait simplement :

La variation de quantité de mouvement d'un corps au cours du temps est due à la résultante des forces extérieures appliquées sur ce corps.

Il peut y avoir plusieurs forces appliquées sur un objet, mais étant donné que la force est une grandeur extensive, la force résultante est la somme vectorielle des forces. A présent, on désire transcrire la 2^e loi de Newton, aussi appelée loi du mouvement, sous forme mathématique. La variation de la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ au cours du temps, lorsque l'intervalle de temps tend vers 0 est simplement la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps. Puisque la cause de la variation de quantité de mouvement est la résultante des forces extérieures $\mathbf{F}^{\text{ext}}$, l'équation du mouvement s'écrit simplement comme,

$$\boxed{\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{p}}} \quad (2.17)$$

Cette équation est très générale puisqu'elle est valable non seulement en mécanique, mais également en électrodynamique, en physique quantique et même en relativité restreinte. En relativité générale, elle est remplacée par un concept plus abstrait. Ce concept est la courbure de l'espace-temps.

Pour pouvoir établir la loi du mouvement (2.17), il est essentiel de considérer que la quantité de mouvement est une grandeur extensive. Sinon, on ne pourrait pas identifier sa dérivée par rapport au temps avec la résultante des forces extérieures. Dans une équation physique, on ne peut identifier que des grandeurs physiques de même nature. On voit ici le bien-fondé de la démarche de Newton qui postule l'existence de la quantité de mouvement pour pouvoir établir un lien explicite entre la variation de l'état de mouvement et sa cause. On va maintenant déterminer l'expression explicite de la quantité de mouvement d'un point matériel.

2.3.7 Quantité de mouvement et vitesse

La quantité de mouvement $\mathbf{p}$ doit satisfaire la loi du mouvement (2.17). Par conséquent, la quantité de mouvement est définie à une constante près puisque la loi du mouvement est définie en termes de la dérivée de la quantité de mouvement. Ainsi, deux quantités de mouvement qui diffèrent d'une constante conduisent à une loi du mouvement identique. La quantité de mouvement n'est donc à priori pas définie de manière unique. La convention est de choisir la quantité de mouvement telle qu'elle s'annule lorsque l'objet est au repos. Cette convention, appelée un choix de jauge, dépend du référentiel choisi.

A présent, on désire établir la relation entre la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et la vitesse $\mathbf{v}$. La quantité de mouvement $\mathbf{p}$ décrit le mouvement d'une quantité de matière de masse m et de vitesse $\mathbf{v}$. Par conséquent, la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ doit être une fonction vectorielle de la masse m et de la vitesse $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(m, \mathbf{v}) \quad (2.18)$$

Comme la quantité de mouvement et la masse sont des grandeurs extensives, la quantité de mouvement $\mathbf{f}(km, \mathbf{v})$ d'un système constitué de k points matériels de masse m et de vitesse $\mathbf{v}$ identiques est égale à la somme des quantités de mouvement $\mathbf{f}(m, \mathbf{v})$ de chaque point matériel,

$$\mathbf{f}(km, \mathbf{v}) = k \mathbf{f}(m, \mathbf{v}) \quad (2.19)$$

En appliquant la définition (1.13) de la dérivée d'une fonctionnelle, on prend la dérivée de la relation d'extensivité de la quantité de mouvement (2.19) par rapport à k en gardant m fixe qui s'écrit,

$$\frac{d\mathbf{f}(km, \mathbf{v})}{d(km)} \frac{d(km)}{dk} = \frac{dk}{dk} \mathbf{f}(m, \mathbf{v}) \quad (2.20)$$

et se réduit à,

$$\frac{d\mathbf{f}(km, \mathbf{v})}{d(km)} m = \mathbf{f}(m, \mathbf{v}) \quad (2.21)$$

La relation (2.21) doit être satisfaite quel que soit le nombre de points matériel k . En particulier pour $k = 1$, elle peut être mise sous la forme,

$$\frac{d\mathbf{f}(m, \mathbf{v})}{dm} = \frac{\mathbf{f}(m, \mathbf{v})}{m} \quad (2.22)$$

La relation (2.22) implique que la quantité de mouvement est proportionnelle à la masse m , où le facteur de proportionnalité est une grandeur vectorielle indépendante de la masse, qui est exprimée comme le rapport des deux grandeurs extensives $\mathbf{p}$ et m . La vitesse $\mathbf{v}$ est une grandeur intensive décrivant le mouvement. Ainsi, le facteur de proportionnalité est une fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ de la vitesse $\mathbf{v}$. Par conséquent, la quantité de mouvement est exprimée en termes de la masse m et de la vitesse $\mathbf{v}$ comme,

$$\mathbf{p} = m \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (2.23)$$

et $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, d'après notre choix de la définition de la quantité de mouvement. L'expression (2.23) de la quantité de mouvement est tout à fait générale et s'applique aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique relativiste. L'expression explicite de la fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ doit être tirée de l'expérience.

Pour ce faire, on se place dans le cadre de la mécanique classique où les vitesses sont très faibles par rapport à la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. L'expérience consiste en un choc mou entre deux glisseurs identiques de masse m sur un rail à air horizontal. Les deux glisseurs restent accrochés après le choc (Fig. 2.8). Le premier glisseur qui a un

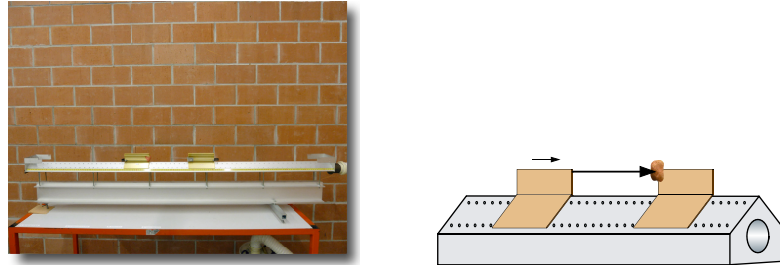


FIGURE 2.8 Choc mou entre deux glisseurs identiques sur un rail à air horizontal.

mouvement rectiligne uniforme de vitesse initiale $\mathbf{v}$ percute le second glisseur qui est initialement au repos. Lors de la collision, la pointe qui se trouve sur le premier glisseur s'enfonce dans la pâte à modeler fixée sur le second. Après la collision, on observe que le système formé des deux glisseurs a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\mathbf{v}/2$. Comme la résultante des forces extérieures agissant sur le système formé des deux glisseurs est nulle, la 2^e loi de Newton affirme que la quantité de mouvement totale est conservée lors de la collision. La quantité de mouvement initiale du second glisseur est nulle. Par conséquent, la quantité de mouvement initiale du premier glisseur doit être égale à la quantité de mouvement finale des deux glisseurs,

$$m \mathbf{f}(\mathbf{v}) = 2m \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right) \quad (2.24)$$

La dérivée de la relation (2.24) par rapport à la vitesse divisée par la masse m s'écrit,

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}} = 2 \frac{d\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right)}{d\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right)}{d\left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right)} \quad (2.25)$$

La relation (2.25) implique que la dérivée de la fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ est constante,

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}} = \gamma = \text{cste} \quad (2.26)$$

où la grandeur scalaire $\gamma > 0$ est définie positive pour que la quantité de mouvement soit orientée dans le sens du mouvement défini par la vitesse $\mathbf{v}$. En intégrant la relation (2.26) compte tenu de la condition initiale $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, on en conclut que la fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ est une fonction linéaire de la vitesse $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \gamma \mathbf{v} \quad (2.27)$$

Par conséquent, pour des vitesses très faibles par rapport à la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, en substituant la relation (2.27) dans la relation (2.23), celle-ci devient,

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (2.28)$$

Sans perte de généralité, on peut choisir de prendre $\gamma = 1$. Dans ce cas, la quantité de mouvement (2.28) se réduit au produit de la masse et de la vitesse,

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad (2.29)$$

qui est une expression phénoménologique puisqu'elle est tirée de l'expérience. Compte tenu de la relation phénoménologique (2.29), l'unité physique de la quantité de mouvement dans le système international d'unités est notée $[\text{kg m s}^{-1}]$.

2.3.8 Dynamique du point matériel

La dynamique d'un point matériel s'obtient à partir de la dynamique d'un système mécanique en imposant une condition supplémentaire. Un point matériel est caractérisé par une masse constante, ce qui impose la condition,

$$m = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \dot{m} = 0 \quad (2.30)$$

En substituant l'expression (2.29) de la quantité de mouvement dans la loi du mouvement (2.17), celle-ci s'exprime explicitement en termes de la vitesse comme,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{m} \mathbf{v} + m \dot{\mathbf{v}} = m \dot{\mathbf{v}} = m \mathbf{a} \quad (2.31)$$

Compte tenu de la condition (2.30) et de la définition du vecteur accélération (2.3), la 2^e loi de Newton (2.31) se réduit à la loi du mouvement d'un point matériel,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = m \mathbf{a} \quad \text{si} \quad m = \text{cste} \quad (2.32)$$

Compte tenu de la loi du mouvement (2.32), l'unité physique de la force dans le système international d'unités est le Newton noté $[\text{N}] = [\text{kg m s}^{-2}]$.